序　　言

皆さんの日々の要求に応えるため、身近な電子機器の中を動き回り働いてくれているのは電気信号です。しかもそのほとんどは矩形波の形をしています。皆さんはこの矩形波が高校で学ぶ sin, cos を使って理解できることをご存じでしょうか。sin, cos と、これらを発展させたガウス座標や虚数、三角関数の微積分など高校で学ぶ内容に加え、オイラーの公式を下地として知っていれば、フーリエ級数を使って矩形波を知り、ラプラス変換を使って矩形波の変化を予想することが可能になります。さらに Excel を使えば矩形波、さらには矩形波を電気回路に入れた結果現れる出力波形を目に見える形で再現することが可能です。

この本では理科系の学生に必須であるフーリエ級数とラプラス変換を Excel を使って体感として楽しく学べる工夫を試みました。しかも、作成した Excel はフーリエ級数とラプラス変換の習得で目的を終えるわけではなく、特に電気のエンジニアにとってはその後も継続してさまざまな課題解決の助けとなるツールになり得ると考えています。

内容ですが、はじめに三角関数などの公式をまとめて掲載しています（0 章）。フーリエ級数とラプラス変換を学ぶ際に、公式を他書などで調べる手間を省く目的です。また、公式に付随して簡単な解説も載せています。特に、久々に高校の数学に接する方には助けになるかと思います。もちろん、公式の章は時折参照しながら、フーリエ級数以降の章を読み進めても結構です。

そして、フーリエ級数以降の章に入ります。この本の内容は大きく二つに分けられます。“ 解説 ” と “Excel グラフの作り方 ” です。解説は読み飛ばして、Excel のグラフ作りだけを楽しむこともできるかと思います。フーリエ級数の章（1 章）では、その意味や使い方を学ぶ以外も、負の周波数や虚数のスペクトルなど、興味を引かれる内容にも触れていきます。フーリエ級数で純粋な矩形波を再現できた後に挑戦するのがラプラス変換です。

ラプラス変換の章（2 章）では、抵抗、コンデンサ、コイルなどの回路素子に前章で作成した矩形波が入り込むと、どのような波形に変わってしまうのかを波形のグラフとして見ることができます。また、ラプラス変換から見たい波形の式を導く際、あらかじめ計算しておいた三角関数の畳み込み積分の結果を利用する方法を提案したいと思います。

最後に応用例として変調の章（3 章）を設けました。変調の章では、波の掛け算について考えてみたいと思います。Excel を使うと具体的な事例を扱うことができます。特にこれからノイズの解析などスペクトルに係わる方の参考になることを期待しています。

本書は、Excel で信号波形を再現するという目的に沿ってストーリーを組んでいます。お互いに関連が薄い公式の解説を羅列したものではありませんので、途中迷うことなく読み進められるかと思います。学生の方には sin, cos の先にある応用の世界を、エンジニアの方には知識の整理を、工学にあまり関わる機会のない方にもその一端を、この本を一歩前へ進むそのきっかけにしていただけると幸いです。

2023 年 10 月

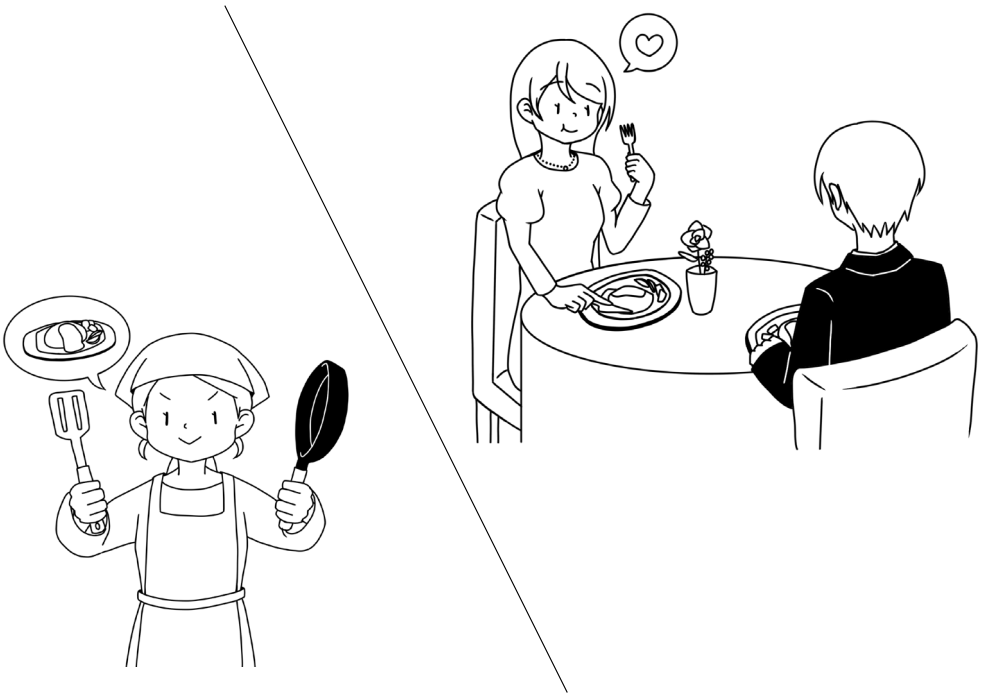
柏 田 順 治

1. フーリエ級数

信号の特徴を分析したり、先の状態を予想するのに大変有効な方法として、フーリエ級数・フーリエ変換による解析があります。

フーリエ級数を使った解析のイメージは、レストランで食べた印象的な料理を身近な材料や調理器具で再現しようとすることに似ているかもしれません。使い慣れた材料や道具なら、でき上がりの予想も難しくはありませんし、もしかすると、レストランの味の意外な秘密に気づくことも期待できるかもしれません。フーリエ級数を使った解析は、解析したい信号（レストランの料理）をいくつかの馴染みの関数の足し合せ（身近な材料や調理器具の組み合わせ）でコピーを作り、元の信号ではなく、そのコピーのほう（自力で作った料理）を考察する方法と言えます。コピーした信号に、馴染みの信号がどんな比率で含まれているのか？ でオリジナルの信号の特徴を知り、また、コピーした信号に含まれる馴染みの信号をそれぞれ変化させ、再度足し合わせて次の信号の状態を予想する。こういったやり方がフーリエ級数・フーリエ変換を使った解析の基本と言えます。

コピーするための関数（信号）の選び方で、解析するコピーがオリジナルの信号と似ていなかったり、知りたい情報がうまくコピーできなかったりする可能性があるわけですが、いくつかの関数の組み合わせは、オリジナルの信号を完璧にコピーできることがわかっています。完全なコピーを作ることができ、しかも、解析に大変都合がよい sin、cos とその周波数違いを組み合わせで作る関数が、この本で扱うフーリエ級数です（フーリエ級数自体は sin、cos の足し合わせに限定されるものではありません）。



1.1 フーリエ級数の式

(a) フーリエ級数

フーリエ級数が何なのかをまず説明しようと思います。冒頭で、解析したいオリジナルの信号を別の（馴染みの）信号の足し合わせとしてコピーすると書きました。そのオリジナルの信号を $s(t)$、コピー後の信号を $f(t)$ とします。どちらも時間 t の関数であることに注意しましょう。$f(t)$ のほうはいくつかの信号を足し合わせて作ります（ですから級数です）。$f(t)$ を構成している個々の信号を $g_n(t)：n=0,1,2,\cdots$ とし、足し合わせる比率を係数 Cn とします。つまり、

$$f(t)=C_0g_0(t)+C_1g_1(t)+C_2g_2(t)+C_3g_3(t)+\cdots \qquad (t_0 \leqq t < t_0+T) \tag{1-1}$$

です。$g_n(t)$ に都合のよいものを選び、$f(t)$ をオリジナルの信号 $s(t)$ に近づける（できれば一致させる）ために、最適な C_n を順に計算していく過程を、$s(t)$ を“フーリエ級数に展開する”と言います。

さて、フーリエ級数に展開（$s(t)$ を $f(t)$ の形にコピー）したとして、それがうまくできたかを判断するにはどうすればよいでしょう？　簡単な方法はオリジナル信号とコピーした信号の差、$s(t)-f(t)$ が十分小さいことを確認することです。これ以降、$s(t)$ を周期 $T[s]$ の周期関数として考えます。適当な時間 $t_0[s]$ から 1 周期（$t_0[s]$～$t_0+T[s]$）の間でコピーがうまくいっていることを確認できれば、$s(t)$ はその繰り返しですので全ての時間について、この期間の解析結果が使えるわけです。$s(t)-f(t)$ は時間 t によって値が異なるので、コピーが全体としてうまくいっているかの判断には、T 期間についてこの値の“平均”を最小にすることを考えます。平均なので t_0～t_0+T までの各 $s(t)-f(t)$ を足し合わせて時間 T で割ります。足し合わせは積分で表せるので、$s(t)-f(t)$ の T 期間の平均は、

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\{s(t)-f(t)\}dt=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\{s(t)-f(t)\}\,dt \tag{1-2}$$

となります。積分後に t_0 を代入した値は打ち消されるので、積分期間は 0～T としても同じです。式 (1-2) の積分は図でイメージするならば（**図 1-1**）です。これを使ってコピーの良し悪しを判断したいのですが、しかしこのままでは問題があります。それは、$f(t)$ が $s(t)$ より大きくなる場合です（**図 1-2**）。

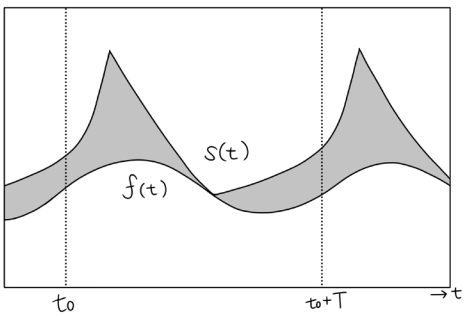


図 1-1

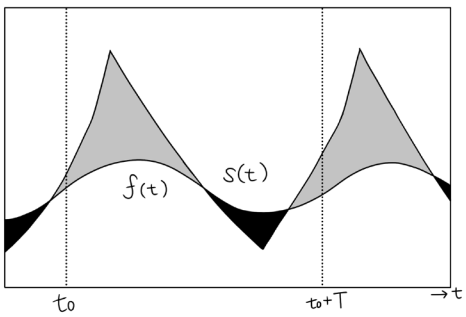


図 1-2

そのような期間では $s(t)-f(t)$ がマイナスになるので、別の時間の差分を打ち消し、あたかも $f(t)$ が

$s(t)$ に近づいたように誤解してしまいます。$s(t)-f(t)$ はプラスであってもマイナスであっても、差が存在することに違いはありません。こういう場合の常套手段は 2 乗平均です。一度 2 乗してマイナスを消し、この 2 乗したもので平均を計算し、最後に√をとります。

$$\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \{s(t)-f(t)\}^2\,dt} \tag{1-3}$$

結局、上式が十分小さければよく、ゼロであれば $s(t)$ と $f(t)$ は完全に一致していると言えます。

さて、$f(t)$ は式 (1-1) でした。やりたいことは、最適な C_n を順に計算していき、式 (1-3) を最小（できればゼロ）にすることです。例えば C_2 を計算する場合を考えましょう。C_2 の値を変えていって式 (1-3) が最小となる C_2 を選びたいのですが、これは式 (1-3) を C_2 の関数とみて、式 (1-3) が最小値となる C_2 を求めることに等しい。つまりで式 (1-3) を C_2 で微分してそれがゼロとなる C_2 を計算すればよいわけです。したがいまして、

$$\frac{\partial}{\partial C_2}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \{s(t)-f(t)\}^2\,dt} = 0 \tag{1-4}$$

が式 (1-3) を最小にする C_2 を決める式になります。

※　偏微分をおさらいしましょう。式 (1-3) には C_2 以外にも、C_0、C_1、C_3 など変数の候補がたくさんあります。ほかの変数の候補が C_2 に直接影響を与えない前提で C_2 を変数に選び、ほかの変数の候補を定数とみなして微分することを偏微分といい、それを明示するために記号 ∂ を使います。

式 (1-4) の微分を行うと、√つまり 1/2 乗が− 1/2 乗となり、その式に√の中の式を微分したものを掛けることになるので、結局、式 (1-4) の条件は√の中の式を C_2 での微分したものが 0 であればよいということになります。

$$\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{1}{T}\int_0^T \{s(t)-f(t)\}^2\,dt = \frac{\partial}{\partial C_2}\frac{1}{T}\int_0^T \{s^2(t)-2s(t)f(t)+f^2(t)\}\,dt = 0 \tag{1-5}$$

ここで、式 (1-5) の積分の中の各項を順番にみていきましょう。

まず始めの項は、

$$\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt \to 0 \tag{1-5a}$$

オリジナルの信号である $s(t)$ に C_2 は含まれていません。当然 $s(t)$ を 2 乗して積分したものにも C_2 は含まれないので、C_2 で微分すれば、この項はゼロです。

次の項は $f(t)$ を含みます。$f(t)$ は式 (1-1) でした。

$$\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{-2}{T}\int_0^T f(t)s(t)dt$$

$$=\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{-2}{T}\int_0^T \{C_0\mathrm{g}_0(t)s(t)+C_1\mathrm{g}_1(t)s(t)+C_2\mathrm{g}_2(t)s(t)+C_3\mathrm{g}_3(t)s(t)+\cdots\}dt \qquad (1\text{-}5b)$$

$$=\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{-2}{T}\int_0^T C_2\mathrm{g}_2(t)s(t)dt$$

積分の中身をみると、今変数として扱っている C_2 があるのは $C_2\mathrm{g}_2(t)s(t)$ だけで、残りは C_2 にとっては定数です。定数とみなせるこれらの項は C_2 で微分すればゼロになるので、式 (1-5b) の最後の式となります。

やっかいなのは、式 (1-5) の 3 番目の項です。積分の中身は $f^2(t)$ で、$f(t)$ は式 (1-1) で表されるので多項式の 2 乗になってしまいます。まず、項が四つの場合の 2 乗が、

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

であることを参考に、式 (1-5) の 3 番目の項を複数行に分けて書き表します。

$$\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt$$

$$=\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{1}{T}\int_0^T \{{C_0}^2{\mathrm{g}_0}^2(t)+{C_1}^2{\mathrm{g}_1}^2(t)+{C_2}^2{\mathrm{g}_2}^2(t)+{C_3}^2{\mathrm{g}_3}^2(t)+\cdots\}dt$$

$$+\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{2}{T}\int_0^T \{C_0\mathrm{g}_{\mathbf{0}}(t)C_1\mathrm{g}_{\mathbf{1}}(t)+C_0\mathrm{g}_{\mathbf{0}}(t)C_2\mathrm{g}_{\mathbf{2}}(t)+C_0\mathrm{g}_{\mathbf{0}}(t)C_3\mathrm{g}_{\mathbf{3}}(t)+C_0\mathrm{g}_{\mathbf{0}}(t)C_4\mathrm{g}_{\mathbf{4}}(t)+\cdots\}dt \qquad (1\text{-}5c)$$

$$+\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{2}{T}\int_0^T \{C_1\mathrm{g}_{\mathbf{1}}(t)C_2\mathrm{g}_{\mathbf{2}}(t)+C_1\mathrm{g}_{\mathbf{1}}(t)C_3\mathrm{g}_{\mathbf{3}}(t)+C_1\mathrm{g}_{\mathbf{1}}(t)C_4\mathrm{g}_{\mathbf{4}}(t)+\cdots\}dt$$

$$+\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{2}{T}\int_0^T \{C_2\mathrm{g}_{\mathbf{2}}(t)C_3\mathrm{g}_{\mathbf{3}}(t)+C_2\mathrm{g}_{\mathbf{2}}(t)C_4\mathrm{g}_{\mathbf{4}}(t)+\cdots\}dt$$

$$\vdots$$

右辺 1 行目は、式 (1-5b) と同じ考え方で変数 C_2 を持つ

$$\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{1}{T}\int_0^T {C_2}^2{\mathrm{g}_2}^2(t)dt \qquad (1\text{-}6)$$

のみが残ります。

そして面倒そうな右辺の 2 行目以降ですが、これを全てゼロにする方法があります。

右辺 2 行目以降の積分の中身の特徴は何でしょう？　関数 $\mathrm{g}_n(t)$ に注目すると、各項は添え字が異なる

二つの $g_n(t)$ の掛け算になっています。$g_l(t)g_m(t)$、$l \neq m$ の形です。添え字が同じ場合（$l = m$）はすでに 1 行目に書かれているので当然です。右辺 2 行目以降をゼロにするには、$l \neq m$ のとき $g_l(t)g_m(t) = 0$ になる関数 $g_n(t)$ を探してくればよいわけです。$g_l(t)g_m(t) = 0$ が無理でも、$g_l(t)g_m(t)$ を $0 \sim T$ で積分した値がゼロになる下記のような関数 $g_n(t)$ があれば式 (1-5c) の右辺 2 行目以降をゼロにできます。

$$\begin{aligned} &\int_0^T g_l(t)\, g_m(t)dt = 0 && (l \neq m) \\ &\int_0^T g_l(t)\, g_m(t)dt = \int_0^T {g_l}^2(t)dt = \text{定数} && (l = m\ ) \end{aligned} \tag{1-7}$$

$l = m$ の場合は 0 にならなかったとしてもかまいません。ただ、定積分ですので定数になるはずです。

式 (1-7) の左辺のように、関数と関数を掛け合わせて積分する操作を、ベクトルの直交関係を確かめる演算と同じく、内積と呼びます。式 (1-7) のように異なる関数間の内積が 0 で、関数自身の内積が定数である場合、やはりベクトルと同様に直交していると言い、$g_n(t) : n = 0,1,2, \cdots$ は直交関数からなる集合であると言います。

直交関数からなる $g_n(t)$ を探してくれば式 (1-7) から、式 (1-5c) の右辺の 2 行目以降がゼロになることがわかりました。が、そんな都合のよい関数があるのでしょうか？　実は、この本の主役と言うべき、$\cos(n\omega t)$、$\sin(n\omega t) : \omega$ は角周波数、がその都合のよい関数なのです。公式にも上げていますが、$\cos(n\omega t)$、$\sin(n\omega t)$ からなる集合は直交関係にあることが下記からわかります。

$$\begin{aligned} &\int_0^T \cos(l\omega t)\cos(m\omega t)\, dt = \begin{cases} 0 & (l \neq m) \\ \dfrac{T}{2} & (l = m) \end{cases} \\ &\int_0^T \sin(l\omega t)\sin(m\omega t)\, dt = \begin{cases} 0 & (l \neq m) \\ \dfrac{T}{2} & (l = m) \end{cases} \qquad l, m : \text{自然数} \\ &\int_0^T \cos(l\omega t)\sin(m\omega t)\, dt = \begin{cases} 0 & (l \neq m) \\ 0 & (l = m) \end{cases} = 0 \end{aligned} \tag{1-8}$$

上記では l と m は自然数ですが、l または m がゼロの場合について計算すると、$l = m$（両方ゼロ）のときは式 (1-8) と異なる定数となりますが、$l \neq m$ の場合の値はゼロです。つまり、$n = 0,1,2, \cdots$ について、$\cos(n\omega t)$、$\sin(n\omega t)$ は直交関数からなる集合であると言えます。

この本の三角フーリエ級数では必要ありませんが、l または m にマイナス掛けても式 (1-8) は成り立ちますので、$\cos(n\omega t)$、$\sin(n\omega t)$ の集合は、n を整数としても直交関数からなる集合です。

※ ちなみに、関数自身の内積の結果を定数、式 (1-8) の例では $T/2$ のままにせず、両辺を定数で割り、関数自身の内積が常に 1 になるように元の関数を選ぶことを正規化すると言い、そうしてできる $g_n(t)$ を正規直交関数と呼びます。式 (1-8) の例では、n を自然数として、$\cos(n\omega t)$、$\sin(n\omega t)$ それぞれに $\sqrt{2/T}$ を掛けたものを $g_n(t)$ とすれば、ただの直交関数から正規直交関数に変わります。

$g_n(t)$ として、$\sin(n\omega t)$、$\cos(n\omega t)$ のような式 (1-7) を満たす関数を選べば、式 (1-5c) の右辺の 2 行目以降をゼロにできることがわかりました。

さて、この項 1.1（a）フーリエ級数の目的を思い出しましょう。$s(t)$ をコピーした式 (1-1)

$$f(t) = C_0 g_0(t) + C_1 g_1(t) + C_2 g_2(t) + C_3 g_3(t) + \cdots \qquad (t_0 \leqq t < t_0 + T) \tag{1-1}$$

で表される $f(t)$ の C_n の最適値を計算することでした。C_2 を例として考えています。ここまでに、式 (1-5)

$$\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{1}{T}\int_0^T \{s(t) - f(t)\}^2\, dt = \frac{\partial}{\partial C_2}\frac{1}{T}\int_0^T \{s^2(t) - 2s(t)f(t) + f^2(t)\}\, dt \ = 0 \tag{1-5}$$

の積分の中身について全て確認が終わりました。積分の中身で最後まで残ったのは、式 (1-5b) の最後の式と、式 (1-6) です。結局、式 (1-5) は、

$$\frac{\partial}{\partial C_2}\frac{1}{T}\int_0^T \{s(t) - f(t)\}^2 dt = \frac{\partial}{\partial C_2}\frac{1}{T}\int_0^T \left\{-2C_2 g_2(t)s(t) + {C_2}^2 {g_2}^2(t)\right\}dt \ = 0 \tag{1-9}$$

まで簡略化されました。もう一歩です。次に、この式の積分の中身を先に C_2 で微分すると、

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left\{-2 g_2(t)s(t) + 2C_2 {g_2}^2(t)\right\}dt \ = 0 \tag{1-10}$$

積分を分けて、一方を移項すると、

$$\frac{2}{T}\int_0^T g_2(t)s(t)dt = \frac{2}{T}C_2 \int_0^T {g_2}^2(t)dt \tag{1-11}$$

C_2 を求めると、

$$C_2 = \frac{\int_0^T s(t)\, g_2(t)dt}{\int_0^T {g_2}^2(t)\, dt} \tag{1-12}$$

です。やっと最適 C_2 の式が導けました。C_2 以外の式 (1-1) の係数も、上式の添え字を 2 から求めたいものに変えて計算すれば、全ての C_n：$n = 0,1,2, \cdots$ が計算できるわけです。

さて、ここまできたら $s(t)$ と $f(t)$ を完全に一致（式 (1-3) をゼロに）させるところまでいきたいものです。$f(t)$ の各項の係数 C_n を計算しつつ、$s(t)$ との差を埋めるために式 (1-1) の項数を無限に増やしていけば、いずれ $s(t)$ と一致する、と皆さんも期待されているかと思います。実際、$g_n(t)$ をうまく選べば、$f(t)$ のような無限級数が任意の関数 $s(t)$ に収束（極限で一致）することが証明されています。このとき、関数の集合 $g_n(t)$：$n = 0,1,2, \cdots$ は完全系である、と言います。

この完全性と、すでに説明した異なる関数どうしを掛けて 1 周期で積分するとゼロになる直交性、の両方の特徴を持つ関数の集合を使えば、周期 0～T の区間で、任意の関数 $s(t)$ を、式 (1-1) の $f(t)$ の形で表した完全なコピーを作ることができます。代表例はやはり、$\cos(n\omega t)$、$\sin(n\omega t)$：ω は角周波数、$n = 0,$

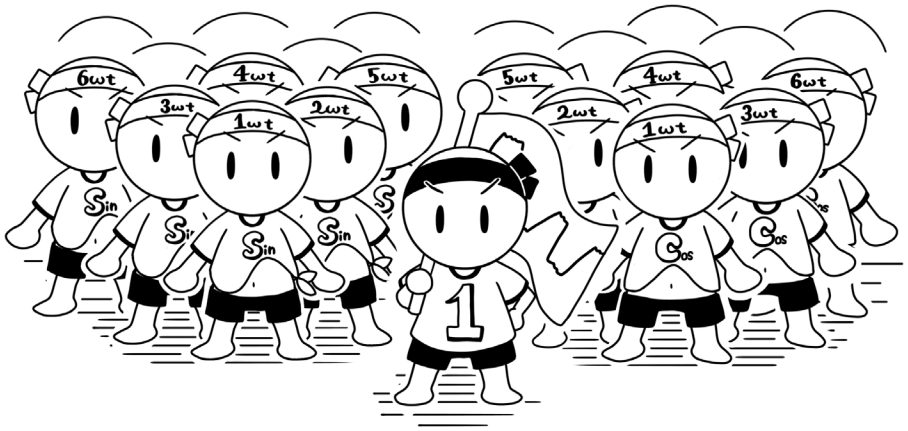
1, 2, … の集合です。$n=0$ の場合、$\cos(n\omega t)=1$、$\sin(n\omega t)=0$ ですので、

1、$\cos(n\omega t)$、$\sin(n\omega t)$　：ω は角周波数、n=1, 2, 3,…自然数

と書き表すこともできます。もう少し具体的に書くと、

1、$\cos(1\omega t)$、$\cos(2\omega t)$、$\cos(3\omega t)$、…、$\sin(1\omega t)$、$\sin(2\omega t)$、$\sin(3\omega t)$、…

です。これらの関数の大きさを調整して（各関数に掛ける定数を変えて）足し合わせることでコピー$f(t)$を作ります。コピーしたい対象の $s(t)$ が、たまたま $\cos(n\omega t)$ の足し合わせのみで完全なコピーができる場合もあるかもしれませんが、$s(t)$ によっては、上記の無限個の関数のうち、一つでも欠けると完全なコピーにならない場合も考えられます。逆に言うと、上記の無限個の関数が全て使えるのであれば完全系ですので、どんな $s(t)$ に対しても万能です。



※　元の信号が不連続な部分を持つ場合、その不連続な点だけは一致させることができません。詳しくは「ギブズ（Gibbs）の現象」で調べてみてください。

この本の解説では必要としませんが、直交系がすでに説明した正規直交系の場合、完全性も備えていれば、“ 完全正規直交系 ” と呼びます。三角関数の場合、

$$\sqrt{\frac{1}{T}},\quad \sqrt{\frac{2}{T}}\cos(n\omega t),\quad \sqrt{\frac{2}{T}}\sin(n\omega t) \tag{1-13}$$

などが、これにあたります。

さて、一度はなかったことにした複素フーリエ級数を計算して出た虚数のスペクトルですが、やはり気になるので意味を考えてみましょう。

まずは、矩形波とのこぎり波について、三角フーリエ級数使って求めたスペクトルと、複素フーリエ級数で求めたスペクトルを表にしてみます。

矩形波（DC）

三角フーリエ級数展開 a_0の計算結果	複素フーリエ級数展開 c_0の計算結果
AD	AD

のこぎり波（DC）

三角フーリエ級数展開 a_0の計算結果	複素フーリエ級数展開 c_0の計算結果
$\frac{A}{2}$	$\frac{A}{2}$

矩形波（基本波・高調波）

	三角フーリエ級数展開 a_nの計算結果(b_n=0)	複素フーリエ級数展開 $c_{\pm n}$の計算結果
正の周波	$2AD\frac{\sin(n\pi D)}{n\pi D}$	$AD\frac{\sin(n\pi D)}{n\pi D}$
負の周波		$AD\frac{\sin(-n\pi D)}{-n\pi D}$

のこぎり波（基本波・高調波）

三角フーリエ級数展開 b_nの計算結果(a_n=0)	複素フーリエ級数展開 $c_{\pm n}$の計算結果
$\frac{-A}{n\pi}$	$j\frac{A}{2n\pi}$
	$j\frac{A}{2(-n)\pi}$

図 1-41

DC を計算した結果は、三角フーリエ級数使っても複素フーリエ級数を使っても同じです。

下の表は基本波・高調波です。前節の 1.2（c）矩形波の複素フーリエ級数（指数フーリエ級数）展開で、複素フーリエ級数で展開すると、周波数が正だけでなく負の値も現れることを確認しました。ですので、基本波・高調波のスペクトルは正の周波数と負の周波数の 2 行に分けています。ここでは整数 m を使わずに自然数 n と符号で表しています。今のところ虚数 j が現れているのは、のこぎり波を複素フーリエ級数展開したスペクトルだけです。ここで、複素フーリエ級数の基本の式を確認してみましょう。式 (1-45) です。この式の $f(t)$ は

$$c_m e^{j m\omega t} \qquad (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \cdots) \tag{1-51}$$

の足し合わせで作られるわけですが、この式にオイラーの公式を適応すると、

$$c_m e^{j m\omega t} = c_m (\cos m\omega t + j \sin m\omega t) \qquad (m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \cdots) \tag{1-52}$$

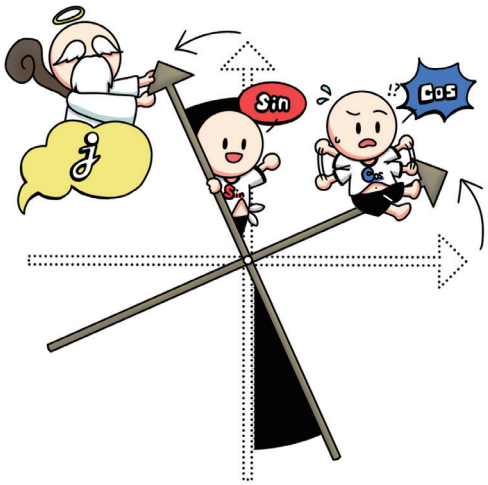
となります。この式から複素フーリエ級数でも cos と sin が基本波と高調波の周波数で変化していることがわかるわけですが、sin の係数を見てください。虚数 j が掛けられています。そうです。もともと複素フーリエ級数の係数（スペクトル）には虚数 j が含まれているのです。前項で矩形波を複素形フーリエ級数展開した結果、周波数が正だけでなく負へも広がりました。さらに、のこぎり波を複素フーリエ級数で展開することで、スペクトルの値が実数だけでなく虚数にまで広がっていることが確認されました。

さらに考察を続けましょう。実際に、のこぎり波のスペクトルを式 (1-51) に入れてオイラーの公式を適応させます。ここでも整数 m ではなく、自然数 n を使って正の周波数の場合と負の周波数の場合を別々

に計算します。

$$c_n e^{j n\omega t} = j\frac{A}{2n\pi}(\cos n\omega t + j \sin n\omega t) = \frac{A}{2n\pi}(-\sin n\omega t + j \cos n\omega t)$$
$$c_{-n} e^{-j n\omega t} = j\frac{A}{2(-n)\pi}\{\cos(-n\omega t) + j \sin(-n\omega t)\} = \frac{A}{2(-n)\pi}\{-\sin(-n\omega t) + j \cos(-n\omega t)\} \quad (1\text{-}53)$$

オイラーの公式適応後の式を見てください。のこぎり波のスペクトルとして現れた j が cos と sin に掛けられることで、もともと実数を表していた cos が、−sin に替わり、虚数を表していた sin が、cos に変わりました。つまり、本書の矩形波のように実数のスペクトルを持つ信号では、cos が基本波・高調波を担っていたのに対し、のこぎり波のような虚数のスペクトルを持つ信号では、−sin が基本波・高調波を担うことになったわけです。一方の cos に変わった虚数項ですが、複素フーリエ級数（1-45）は、Σ記号を使わずに表すと、式（1-41）のような足し算となりますのでプラスとマイナスの周波数の項どうしが打ち消し合い、消えてなくなります。さて、公式の章で、ガウス座標で虚数 j を掛けることは位相を 90 ° 進めることに等しいと書きました。今回確認された実信号の担い手の交代は、j が軸を 90 ° 回転させることで、信号を担っていた実数軸上の cos に替わって、虚数軸に隠れていた sin が主役に躍り出たと言えるかもしれません。そのことを知らせてくれるのがスペクトルに現れる虚数 j と言えそうです。



さて、のこぎり波も矩形波を複素フーリエ級数で展開したときのように、展開した結果を正と負の周波数を使ってそのままグラフにすることも可能です。

Excel

＜表＞sheet “ のこぎり波 (複素)”

矩形波を複素形で計算したシートをコピーして使います。シートの名前を “ 矩形波 (複素)” → “ のこぎり波 (複素)” に変えました。A1 のセルも “ のこぎり波 ” に変更しましょう。

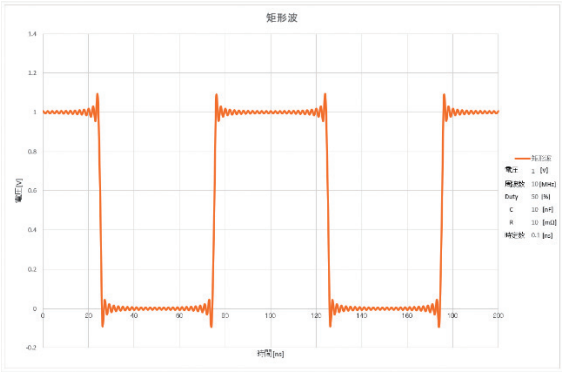
DC のスペクトルは、式 (1-47) で計算したように A/2 なので、セル I5 を A/2 にします。

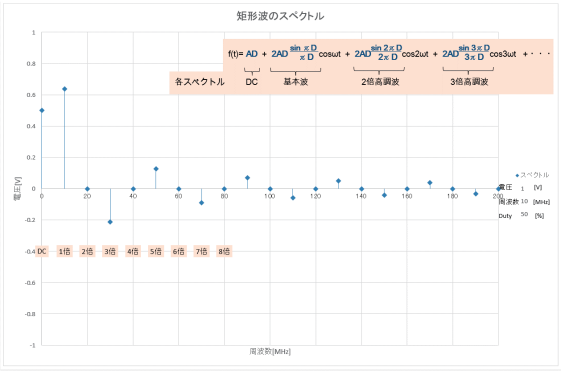
上図のようになったでしょうか？

現在の C=10[nF]、R=10[mΩ] では時間波形にあまり変化は見られませんが、数値を変えて時間波形とスペクトルがどう変わるかを見てみましょう。

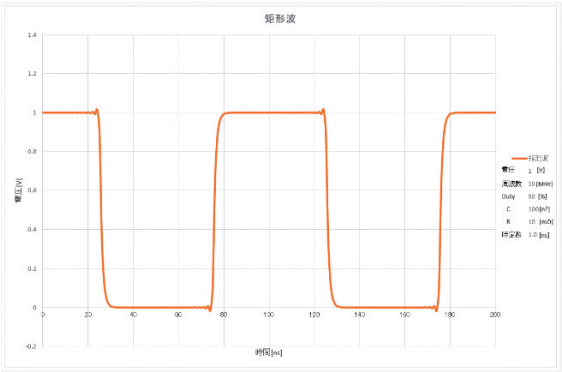
R は 10[mΩ] のままとし、C を、10[nF] → 100[nF] → 1000[nF] → 10000[nF] と変えてみました。現実の測定で検出されるような見慣れた波形が確認できるかと思います。

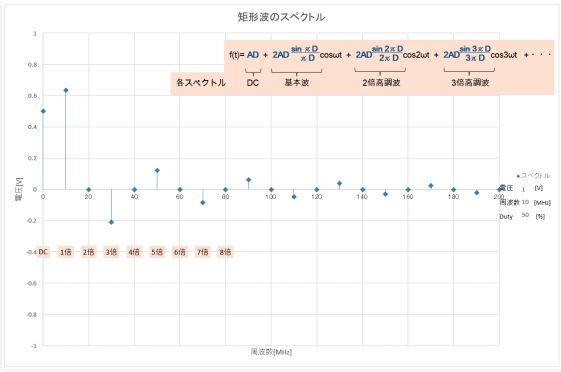
C=10[nF]





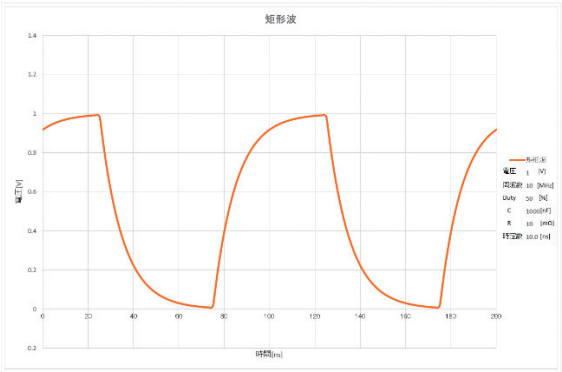
C=100[nF]

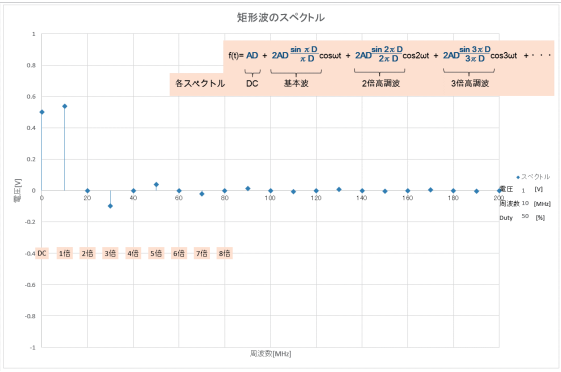




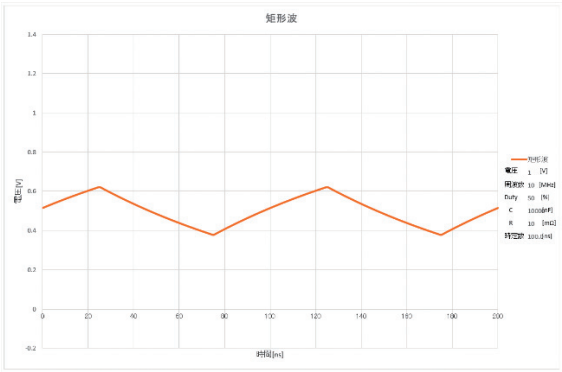
2. ラプラス変換

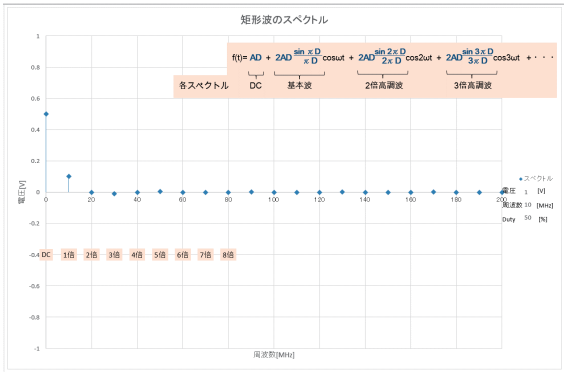
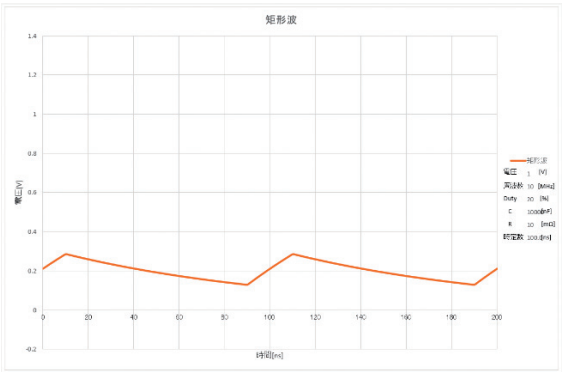
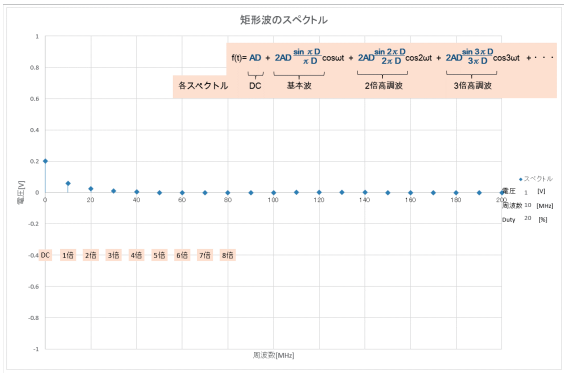
C=1000[nF]





C=10000[nF] Duty50%





C=10000[nF] Duty20%