

はじめに

本書は音と波に関する入門書である。音（波）には人間と類似した点が多々あり、その素顔や振る舞いをできるだけ平易に解説することを心掛けた。素朴なイメージから出発し、音（波）の物理的、数学的世界に少しずつ踏み込んで行く。全9章からなり、その内訳は以下の通りである。

1 章: 音や波に関する素朴なイメージを基に、その振る舞い（性質）を様々な視点から概説する。

2 章: 音とは何か、基本となる物理法則から波動方程式を導き、音について考える。

3 章: 音場に関する概念や用語の数々は、波動方程式の解法と結びついている。波動方程式の解法にまつわる音の世界を垣間見る。

4 章: 物体の振動による音の放射について述べる。呼吸球による音の放射を基に、点音源、面音源、線音源相互の関連や、音源の指向性について考える。

5 章: 音と人の振る舞いには多くの類似性がある。音の伝搬、反射、透過、回折、干渉などの問題は音を擬人化し、人間社会の問題（人間の行動）になぞらえると分かりやすい。

6 章: 音源が近づく場合と遠ざかる場合では音の高さが異なって聞える（ドップラー効果）。周波数の近い2つの純音（可聴音）が出会うとうなり（唸り）が聞えることがある。また空気や水などの媒質の非線形性を利用すると、耳に聞えない超音波から可聴音を取り出すこともできる。ドップラー効果やうなりのメカニズム、媒質の非線形性と耳の係わり等について解説する。

7,8 章: 3章で述べた様々な場合について、実際に波動方程式を解き、音場を表示する。線形系の入出力に対する「重ねの理」をベースに音源と音場との関係を解説する。7章では1次元、8章では3次元の音場を取り扱う。

9 章: この最後の章では、波の伝搬速度が周波数に依存する分散性媒質を取り上

げ，波動方程式と熱伝導や粒子の拡散の方程式及び量子力学におけるシュレーディンガーの方程式との係わりについて述べる。

以上，波と音の世界について平易に解説し記述することに努めた。所々数式が現れるが苦手な人は気にせずに読み飛ばしても構わない。内容の大筋は伝わるよう配慮したつもりである。本書との出会いが音や波に親しみ，より深く学ぶための一助となれば幸甚である。

末筆ですが，本書の編集、出版に際し種々アドバイスを頂いた技報堂出版株式会社編集部の天野重雄氏に感謝の意を表します。

2013 年 9 月

著者一同

第1章 音（波）のイメージ

音や波を理解するためには、主要な性質を知り、親しみをもち、素朴で適切なイメージを描けるようになることがその第一歩である。

1.1 媒質／音／音速

空気や水や金属など音を伝えるものを媒質（媒体^{メディア}）という。音は媒質の振動である。媒質にはびっしりと粒子が詰まっている。空気中でも粒子（窒素分子や酸素分子）が押しくら饅頭をしている。媒質の一部に力が加わると変形を引き起こし、元に戻ろうとして振動を始める。媒質の一部で発生したこの変形（ひずみ）と振動は隣接する媒質粒子に次々に伝わっていく。このように媒質のある部分で生じたひずみ（振動）は周囲にどんどん伝わっていくが、これが音（波）の正体である。そして、この波が周囲に伝搬する速度が音速 c であるが、実は媒質中にはもう一つ速度があることが分かる。

1.2 粒子速度

媒質の各部分（粒子）は自らの静止位置を中心に変位し、振動する。音速 c で移動するのではない。音速 c で伝わるのは媒質のひずみであり、媒質粒子は静止位置を中心に振動しているだけであり、この振動の速度を粒子速度という。通常、粒子速度 u は音速 c に比べ、非常に小さい。

このように音は媒質粒子の振動であり、媒質の無いところ（真空中）では存在しない。

第2章 音の方程式の生い立ち

音とは空気の圧力（大気圧）や体積、密度などの微弱な変動が波として空間を伝わる現象である。従ってこれら諸量の間の基本的な関係（気体の状態方程式）と空気の各部の変形及び振動（運動方程式）を結び付ける必要がある。

本章では、音の物理現象を記述する波動方程式の導き方について、できるだけ平易に述べることにする。

2.1 気体の状態方程式

音は気体の圧力、体積、密度等の微弱な変動に係わる問題である。そこで、まずこれら諸量の間の基本的な関係について整理しておこう。

図 2.1 に示すように気体の各部に注目し、その部分の圧力を P ，体積を V ，密度を ρ ，温度（絶対温度） T ，また熱量を Q ，質量を m とする。気体に関してはよく知られた状態方程式

$$PV = RT \quad (R: \text{気体定数}) \quad (2.1)$$

が成り立つこと、また質量 m は不変であるとすれば

$$\rho V = m = \text{一定} \quad (2.2)$$

が成り立つ。

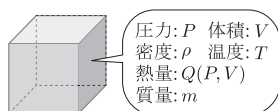


図 2.1 気体の諸量

さらに気体中の音波は断熱変化に従う（音波による気体の膨張，圧縮は極めて迅速であり，熱量 Q の移動は無視できる）ことから

$$Q(P, V) = Q(P(T), V(T)) = \text{一定} \quad (2.3)$$

と考えられる。なお， Q は P と V ，また P, V は T に依存する。

音波はこの気体の状態 P, V, ρ, T に微小な変動 $\Delta P, \Delta V, \Delta \rho, \Delta T$ を引き起こす。これら諸量の微弱な変動の間の関係は式 (2.1), (2.2), (2.3) の微分を取ることで求められる。

$$\frac{\Delta P}{P} + \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T} \quad (2.4)$$

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta V}{V} = 0 \quad (2.5)$$

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P \Delta T = \left(c_V \frac{\Delta P}{P} + c_P \frac{\Delta V}{V}\right) T = 0$$

即ち

$$\left(\frac{\Delta P}{P} + \gamma \frac{\Delta V}{V}\right) T = 0 \quad (2.6)$$

ただし

$$c_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P, c_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V, \gamma = \frac{c_P}{c_V}$$

は定圧比熱，定容比熱及び両者の比（空気ではほぼ 1.4）である。

式 (2.4), (2.5), (2.6) より音波に伴う微弱な変動 $\Delta P, \Delta V, \Delta \rho$ 及び ΔT の間には

$$\Delta P = -\gamma P \frac{\Delta V}{V} = \gamma P \frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\gamma P}{\gamma - 1} \frac{\Delta T}{T} \quad (2.7)$$

なる比例関係があることが知られる。さらに後述のごとく音速 c が

$$c = \sqrt{\gamma P / \rho} \quad (2.8)$$

で与えられることに留意すれば，式 (2.7) は

$$\Delta P = -\rho c^2 \varepsilon_V = c^2 \Delta \rho = \frac{\rho c^2}{\gamma - 1} \frac{\Delta T}{T} \quad (2.9)$$

第3章 波動方程式へのアプローチ

音などの媒質の振動現象は、物理的には波動方程式で記述される。波動方程式は、外力（音源や振源などの駆動源）に関する条件及び空間や時間の縁^{へり}における条件（境界条件、初期条件）を考慮して解かれ、それに伴い、自由振動、強制振動、進行波、定在波、固有振動モード、固有振動数、共鳴等々、様々な用語が現れる。また、波動を表現するのに各種の座標系が用いられ、それにより平面波、円筒波、球面波などが登場する。さらに波動方程式を解くのに系（媒質）の定常応答に基づく方法と、過渡応答に基づく方法がある。波に関する諸概念とそれを表す用語は波動方程式とその解法に密接に結びついている。

3.1 波動方程式と諸条件

波には、弦や膜、棒などを伝わる振動、空気中や水中を伝わる音波、光、電磁波など様々な種類があるが、いずれも波動方程式と呼ばれる同じタイプの方程式

$$\Delta\phi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r},t) = -kg(\mathbf{r},t) \quad (3.1)$$

で記述される。ここに c は波の伝搬速度、 k は定数である。以下では、気体中の音波を例に話を進める。

まず上式の右辺は音源（駆動源）の動作を表し、外力と呼ばれる。そして方程式に課される時間的、空間的制約（束縛）を初期条件及び境界条件という。波動方程式の解は

- 境界条件の有無
- 外力の有無

第4章 物体の振動による音の放射

物体が振動すると周囲に音が放射される。代表的な音源として球音源，面音源，線音源があり，個々別々に論じられることが多い。本章では，半径 a の呼吸球からの音響放射について述べる。面音源及び点音源は呼吸球の特別の場合（半径 a を無限大及び 0 とした極限）であり，また点音源を直線上に密に配列すれば線音源が得られることに留意し，これらの音源から放射される球面波，平面波及び円筒波相互の関連について概説する。そして双極子音源や円形ピストン音源を取り上げ，指向性のルーツについて考える。

4.1 球音源（呼吸球）

図 4.1 のように球表面（半径 a ）が同一の速度 $u_0 e^{j\omega t}$ で半径方向に振動している呼吸球からの音の放射を考える。角周波数 ω の定常音圧 $p e^{j\omega t}$ に関するヘルムホルツの方程式（Helmholtz equation）を図 4.2 の極座標 (r, θ, φ) を用いて表せば（<Note 6> 参照）

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \varphi^2} + k^2 p = 0 \quad (4.1)$$

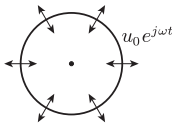


図 4.1 球音源（呼吸球）

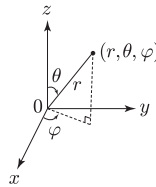


図 4.2 極座標系

第5章 音と人の世界（アナロジー）

波の振舞い（波動現象）は一般に難解であると思われる。その理由は

- 波と物体、波と波との相互作用が複雑である
- それらの現象が不慣れな数式を用いて表現され近寄り難い

ことにある。だが、既に度々指摘したように、波と人間の振舞いには類似した点が多々ある。波を擬人化し、波の気持ちになって考えると、その振舞いがよりよく理解される。1章と幾分重複するところもあるが、このような視点から再度波の振舞いを眺めることにしよう。

5.1 音と擬人化

人は障害物に出会うと、回れ右（後戻り）をしたり、乗り越えたり回り込んだり、時には突き抜けることもある。前方が不案内（先行きが不透明）な場合には、直進することもあれば、進路を変更したり、引き返すこともある。また人と出会えば、互いに協力したり、足を引っ張ったり、無関心を装ったりする。音（波）の場合はどうであろうか。障害物に出会えば、反射したり、回折したり、透過したりする。前方の様子がこれまでと異なると（媒質が変化すれば）、反射するものや屈折するものが出る。また、波（仲間）に出会えば、互いに強めあったり、弱めあったりすることもあれば、干渉しない場合もある。

このように人と音（波）とは極めて類似した振舞いをする。波と人の気持ちは互いに相通じるところがある。

第6章 音を聞く

音とは物理的には媒質（気体、液体、固体）粒子の振動であり、かつその振動が媒質中を伝わる現象である。一般には耳に聞えないものが多いが、日常的には耳に聞えるもの、特に空気中の可聴音を「音」という。本章では

- 移動音源の音の高さの変化（ドップラー効果）
- うなり（ビート）
- 超音波による可聴音の発生

のメカニズムと耳の係わり等について概説する。

6.1 移動音源を聞く（ドップラー効果）

音源が近づいてくると音が大きくなり（直前でピークに達し）、遠ざかりにつれ小さくなっていく。と同時に、音の高さ（周波数）も音源が近づくと時と遠ざかる時では変化する。近づく時は音源の周波数より高く、遠ざかる時は低く聞こえる。この現象はドップラー効果（Doppler effect）として知られており、音源の移動速度の測定等にも利用されている。

ドップラー効果は次のように考えれば容易に理解される。今、図 6.1 に示すように音源（周波数 f_0 [Hz]）が速度 v [m/s] で受音点（観測者）に近づきつつあるとする。音速を c [m/s]、受音点の周波数を f [Hz] とする。音源から受音点に向けて毎秒 $c - v$ [m] の区間に f_0 個の波が放射される。これに対し、毎秒受音点を通過する波の区間長 c [m] の中に含まれる波の個数（周波数）を f とすれば次式が成り立つ。

$$\frac{c - v}{f_0} = \frac{c}{f} (= \lambda : \text{波長}) \quad (6.1)$$

第7章 1次元音場の解析と表示

3章の議論を踏まえ、波動方程式を実際に解いてみよう。3次元空間でも1次元空間でも本質的な差異はない。本章では、記述を簡素にし、見通しをよくするために、1次元の波動方程式（音波の方程式）を取り上げ、外力（駆動源、音源）の有無、境界条件（束縛）の有無により、以下に示す自由空間や閉空間（室）における自由振動や強制振動について考える。

1. 外力無し／束縛無し（自由振動／自由空間）
2. 外力無し／束縛有り（自由振動／閉空間）
3. 定常駆動／束縛無し（角周波数 Ω の強制振動／自由空間）
4. 定常駆動／束縛有り（角周波数 Ω の強制振動／閉空間）
5. 一般の外力／束縛無し
6. 一般の外力／束縛有り

7.1 外力無し：自由振動

外力のない同次方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(x, t) = 0 \quad (7.1)$$

を解くことから始める。ここに $\phi(x, t)$ は速度ポテンシャルを表すものとする。いろいろな方法で解くことができるが、例えば良く知られた変数分離法を適用し

$$\phi(x, t) = X(x)T(t) \quad (7.2)$$

とおき、式 (7.1) に代入すれば関数 $X(x)$ 及び $T(t)$ の常微分方程式

$$\frac{c^2 X''}{X} = \frac{T''}{T} = \text{定数} \equiv -\omega^2 \quad (7.3)$$

第8章 3次元音場の解析と表示

ここでは3次元の音場を取り扱う。音場の解析及び表示は、既に見たように、そのほとんどが波動方程式の線形性に留意し、「重ねの理」を巧みに利用している。音源（外力＝入力）を適切な成分に分解して、受音点（観測点）において各成分の出力（応答）を加算する。波動方程式を線形システムの入出力関係として捉えることにより、各種の解法と相互の関連が見えてくる。

8.1 線形系の入出力と重ねの理

線形系の入力 $x_1, x_2, \dots, x_n$ に対する出力を $y_1, y_2, \dots, y_n$ とすれば、入力の1次結合

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$$

に対する出力は

$$y = a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n$$

で与えられる。入出力に関するこの性質を、線形系における「重ねの理」（「重ね合わせの原理」）と呼んでいる。

重ねの理は線形方程式を解く際に、極めて有用な手段を提供する。と言うのは一般の入力（外力）に対する出力（応答＝解）を求めるには、入力を適切な成分に分解し、個々の成分に対する出力が得られれば、それらを加算合成すればよいからである。入力をどのような成分に分解するかにより解法が異なる。代表的な方法としては

- (1) 周波数成分に分解する

第9章 分散性媒質中の波動伝搬

本書では音と波に係わる素朴なイメージや性質からスタートして、その振る舞いを記述する波動方程式の導出、さらにはその解法等について学んだ。この最後の章では物理学において重要な位置を占める熱や粒子の拡散の方程式及び量子力学におけるシュレーディンガー（Schrödinger）の方程式と波動方程式との関係について言及する。そのため伝搬速度が周波数に依存するいわゆる分散性媒質中の波動を取り上げる。

9.1 分散性媒質

波の伝搬速度は媒質に固有の量であるが、周波数に依存する場合がある。このような媒質中では各種周波数成分からなる複合波形（波束）は伝搬するにつれ周波数毎に徐々にバラけていく。この現象は波の分散といわれる。プリズムによる白色光の分光（様々な色の光に分解される）は分散現象の例である。

伝搬速度 c は電波（光）では媒質の誘電率や透磁率により、音波では媒質の弾性係数により定まる。従って、これらのパラメータが周波数に依存する（周波数特性を持つ）場合には波の分散現象が生じる。

9.2 波動方程式と分散関係

媒質中の光や音の伝搬は数学的には共に同じ波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi(\mathbf{r}, t) = \Delta \phi(\mathbf{r}, t) \quad (9.1)$$

により記述される。ここに c は波の伝搬速度を表し、媒質に固有の量である。光では媒質の誘電率及び透磁率により、音では媒質の弾性係数により定まる。これ