書籍のコピー，スキャン，デジタル化等による複製は，
著作権法上での例外を除き禁じられています．

はじめに

近年の航空機の操縦装置は，フライ・バイ・ワイヤ（FBW）といわれるコンピュータ制御のシステムとなっている．筆者は長らく航空機の飛行制御設計の仕事に携わってきたが，そのほとんどは線形制御系の設計であった．もちろん実際の飛行制御系には多くの非線形要素が存在するため，それらの非線形要素の影響については，シミュレーションによって検証していくという方法であった．いずれにしても，航空機の飛行制御系は線形制御の範囲内で設計するのが基本であった．

これに対して，一般の制御系においては，非線形のダイナミクスをそのまま用いて設計する必要がある例が多い．例えば，倒立振子の振り上げ問題である．台車に載っている振り子を，台車を押すことによって真下に垂れ下がっている状態から真上まで振り上げてそこで止める問題である．勢いが強すぎると振り子は回転を続けて真下に戻ってしまう．丁度真上になったときに回転が止まるようにするには，台車にどのような力を加えたらよいのか，またそのときの時間を指定した場合はどうなるのか，これは初期条件と終端条件を指定した 2 点境界値問題であり解を得るのは簡単ではない．

2 点境界値問題が難しいのは次の理由である．運動方程式という制約の下で，評価関数を最大または最小にする制御を求めるために，運動方程式を初期条件から正時間方向に終端条件まで積分した後，未定乗数に関する微分方程式を終端条件から逆時間方向に積分していく必要がある．また，運動方程式と未定乗数に関する微分方程式は制御入力でつながっているので，単純に繰り返し計算を行うと条件が大きく変動して解が収束しなくなる可能性がある．

このように，理論的に難しい 2 点境界値問題に代表される非線形最適制御問題を，本書では数学理論的な解の導出法ではなく，工学的な観点から，より簡単に解を得る方法を紹介する．この方法は難しい理論を必要としないので初学者にも簡単に利用できる実用的で応用範囲の広い解析法である．

本書は，多くの例題を通して非線形最適制御問題について学ぶことができるようになっている．これから制御設計に携わるエンジニアの方の参考になれば望外の喜びである．

最後に，本書の執筆に際しまして，特段のご尽力をいただいた技報堂出版の石井洋平氏にお礼申し上げます.

2019 年 4 月

片柳亮二

目　次

第 1 章　最適化問題とは …… 1
1.1　最適化問題の分類 …… 1
1.2　線形計画法（LP 法）…… 2
【例題 1.2.1】　線形計画法の例 …… 2
1.3　2 次計画法（QP 法）…… 3
【例題 1.3.1】　2 次計画法の例（1）— 等式制約条件 …… 3
【例題 1.3.2】　2 次計画法の例（2）— 不等式制約条件 …… 4
1.4　非線形システムのフィードバック安定化 …… 7
【例題 1.4.1】　非線形システムの安定化制御（1）…… 7
【例題 1.4.2】　非線形システムの安定化制御（2）…… 9
【例題 1.4.3】　非線形システムの安定化制御（3）…… 10
1.5　非線形最適制御 …… 14
1.5.1　変分法による解法 …… 14
【例題 1.5.1】　最速降下線 — 変分法による解…… 15
1.5.2　一般の最適制御問題の解法 …… 17
【例題 1.5.2】　最速降下線 — 最適制御問題による解…… 19
1.6　本書で利用する解析法 …… 23

第 2 章　数理計画法問題…… 25
【例題 2.1】　目的関数 2 次，制約条件線形の最小化（2 次計画法）…… 25
【例題 2.2】　目的関数 2 次，制約条件 2 次の最小化問題 …… 27
【例題 2.3】　目的関数 1 次，制約条件 1 次と 2 次の最小化問題 …… 29

第 3 章　非線形システムのフィードバック安定化 …… 31
【例題 3.1】　非線形システムの安定化制御（1）…… 31
【例題 3.2】　非線形システムの安定化制御（2）…… 35
【例題 3.3】　非線形システムの安定化制御（3）…… 38

第 4 章　最短時間問題 …… 41
【例題 4.1】　最速降下線 …… 41
【例題 4.2】　加速・減速最短時間制御 …… 44
【例題 4.3】　高度と速度を指定した最短時間上昇 …… 47

第 5 章　時間を指定した状態量の最小化 …… 51
【例題 5.1】　5 秒後の x_i^2 最小（入力制限なし） …… 51
【例題 5.2】　5 秒後の（x_i^2+ 積分［x_i^2］）最小（入力制限なし） …… 54
【例題 5.3】　5 秒後の（x_i^2+ 積分［$x_i^2+u^2$］）最小（入力制限なし） …… 56
【例題 5.4】　5 秒後の x_i^2 最小（入力制限あり） …… 58
【例題 5.5】　5 秒後の（x_i^2+ 積分［x_i^2］）最小（入力制限あり） …… 60
【例題 5.6】　5 秒後の（x_i^2+ 積分［$x_i^2+u^2$］）最小（入力制限あり） …… 62
【例題 5.7】　1 秒間で最小エネルギの質点引き戻し …… 64

第 6 章　位置を指定した運動問題 …… 67
【例題 6.1】　飛翔体の最適航法 …… 67
【例題 6.2】　2 輪車両の車庫入れ（領域制限なし） …… 76
【例題 6.3】　2 輪車両の車庫入れ（領域制限あり） …… 80
【例題 6.4】　2 輪車両の縦列駐車 …… 83
【例題 6.5】　走行クレーンの指定位置での振れ止め静止 …… 86

第 7 章　位置と時間を指定した運動問題 …… 91
【例題 7.1】　20 秒後，指定高度にて水平速度を最大化 …… 91
【例題 7.2】　2 慣性共振系の時間指定の振動抑制（1） …… 95
【例題 7.3】　2 慣性共振系の時間指定の振動抑制（2） …… 102
【例題 7.4】　単振り子の時間指定の振り上げ …… 106
【例題 7.5】　倒立振子の時間指定の振り上げ …… 113
【例題 7.6】　位置と時間を指定した旅客機の飛行運動 …… 119
【例題 7.7】　位置と時間を指定したドローンの飛行運動 …… 129

付録　本書で利用する解析ツール（参考）…… 141
A.1　全　　般 …… 141
A.2　第 2 章の例題のインプットデータ …… 145
A.3　第 3 章の例題のインプットデータ …… 153
A.4　第 4 章の例題のインプットデータ …… 159
A.5　第 5 章の例題のインプットデータ …… 162
A.6　第 6 章の例題のインプットデータ …… 167
A.7　第 7 章の例題のインプットデータ …… 176

参考文献 …… 189

索　　引 …… 193

第 1 章　最適化問題とは

線形制御では，制御対象の運動の状態変数の情報を利用して，**評価関数**（**目的関数**ともいう）を最小にする意味で最適化する状態変数関数を入力に戻すことによって，運動状態を良好な状態に回復させるものであるが，このとき利用されるフィードバック制御入力は運動状態の連続関数であることが基本となっている．このように，線形制御の範囲内で制御を考えていると，例えば車の車庫入れや，倒立振子の振り上げのような切り返し操作などを伴う問題など，世の中に存在する多くの**非線形制御**問題には対応できない．また，制御問題だけではなく，ある変数からなる目的関数を最小とする変数を見いだす最適化問題も応用範囲が広く重要である．本章では，これらの最適化問題についてその概略を述べた後，非線形最適制御問題を簡単に解くことができる **KMAP（ケーマップ）ゲイン最適化法**について述べる．

1.1　最適化問題の分類

変数 x がある制約条件の下で，目的関数 $f(x)$ が最小となる変数 x の値を求める最適化問題は**数理計画法**と呼ばれている．目的関数および制約条件のすべてが線形の場合は**線形最適化問題**または**線形計画法（LP：Linear Programming）**といわれる．目的関数または制約条件のいずれかが非線形である場合は**非線形最適化問題**または**非線形計画法（NLP：NonLinear Programming）**といわれる．

非線形計画法のうち，目的関数が 2 次（非線形）で制約条件が線形の場合は **2 次計画法（QP：Quadratic Programming）**といわれる．また，得られた近似解を**準ニュートン法**の原理を用いて各反復で 2 次計画法問題を解いて最適解に接近させる解法を**逐次 2 次計画法（SQP：Successive Quadratic Programming）**という．

一方，運動方程式で表されるシステムに対して，本書では 2 つの内容を取り上げる．1 つは，制御なしでは不安定な非線形システムをフィードバック制御に

より安定化する問題である．もう 1 つは，制御なしでも安定なシステムについて，評価関数を最小にする操作入力を求める**最適制御問題**である．このとき，初期条件と終端条件を指定した問題は **2 点境界値問題**といわれる．対象となる運動方程式が線形の場合には**線形最適制御問題**，非線形の場合は**非線形最適制御問題**といわれる．なお，運動方程式は線形であっても，制約条件にかかっている場合は運動は非線形となる．これらの最適化問題について，以下簡単に説明する．

1.2　線形計画法（LP 法）

線形計画法の問題は，シンプレックス法により大規模な問題も効率よく解くことができる．シンプレックス法の原理を次の例題にて述べる．

例題 1.2.1　線形計画法の例

いま，2 変数 x_1，x_2 の場合を考える．目的関数 f および制約条件を次のような線形関数のとき，シンプレックス法の原理を図で説明せよ．

$$\text{目的関数}\quad f(x) = a_0x_1 + b_0x_2 \qquad \text{制約条件}\begin{cases} ①\ a_1x_1 + b_1x_2 \le c_1 \\ ②\ a_2x_1 + b_2x_2 \le c_2 \\ ③\ a_3x_1 + b_3x_2 \le c_3 \end{cases}$$

ただし，$x_1 \ge 0$，$x_2 \ge 0$ である．

目的関数 f および制約条件は線形であるから，**図 1.2.1(a)** に示すように制約条件①，②，③を満足する領域は斜線部分（**実行可能領域**といわれる）となる．このとき，目的関数 f を描くと，f が最大となる点は実行可能領域の端点のみを調べればよく，これは直線 f が黒丸の点 A に接するときであることがわかる．変数が 2 つの場合は，**図 1.2.1(a)** のような平面図を描くことができるが，変数の数が増えると制約条件を満足する領域は多次元空間における凸多面体となり難しくなる．シンプレックス法は，凸多面体の端点に対する目的関数 f の値を効率よく見いだしていく手法である．

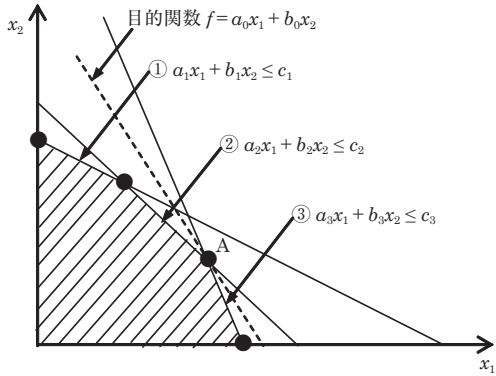

図 1.2.1(a)　シンプレックス法の原理

1.3　2 次計画法（QP 法）

2 次計画法の問題は，目的関数が 2 次（非線形）で制約条件が線形の場合である．まず，制約条件が $g_i(x) = 0$ のような**等式制約条件**の場合の解き方を次の例題で述べる．

例題 1.3.1	**2 次計画法の例（1）— 等式制約条件**

いま，2 変数 x_1，x_2 の場合を考える．目的関数 f を次の制約条件 g のもとで最小化することを考える．

$$f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2, \quad g(x) = 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \tag{1}$$

この問題は，**ラグランジュ未定乗数法**によって次のように解くことができる．次式のラグランジュ関数 L を考える．

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda\, g(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda(2x_1 + x_2 - 1) \tag{2}$$

このとき，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4x_2 + \lambda = 0 \\ g = 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

(3)式は，x_1，x_1 および λ に関する連立方程式であるので，これを解くと次式を得る．

$$x_1 = \frac{4}{11}, \quad x_2 = \frac{3}{11}, \quad \lambda = -\frac{12}{11} \tag{4}$$

次に，制約条件が $g_i(x) \leq 0$ のような**不等式制約条件**の場合の解き方を次の例題で述べる．

例題 1.3.2	**2 次計画法の例（2）— 不等式制約条件**

2 変数 $x_1 \geq 0$，$x_2 \geq 0$ の場合として，目的関数 f を次の制約条件 g_i のもとで最小化することを考える [22]．

$$f(x) = 0.5\{(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 6)^2\} \tag{1}$$

$$\begin{cases} g_1(x) = 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ g_2(x) = x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ g_3(x) = x_1 + x_2 \geq 3 \end{cases} \tag{2}$$

この場合は等式制約条件のように，ラグランジュ未定乗数を一義的に決定できないが，以下に示す **KKT 条件（カルーシュ・クーン・タッカー条件）**を利用することにより，下記のように解を導き出すことができる．

次式のラグランジュ関数 L を考える．

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= f(x) + \lambda_i g_i(x) \\ &= 0.5\{(x_1 - 8)^2 + (x_2 - 6)^2\} + \lambda_1(3x_1 + x_2 - 15) \\ &\quad + \lambda_2(x_1 + 2x_2 - 10) + \lambda_3(3 - x_1 - x_2) - \lambda_4 x_1 - \lambda_5 x_2 \end{aligned} \tag{3}$$

このとき，KKT 条件は次のように表される．

$$\frac{\sin^2\tau_f}{\tau_f-\sin\tau_f\cos\tau_f}=\frac{h}{l} \tag{24}$$

この式により，与えられた l および h に対して τ_f が決定される．
また，(22)式の第 2 式および（23)式から次が得られる．

$$v_x=\frac{\sin\tau_f}{\sqrt{2gh}},\quad \therefore t_f=\frac{\tau_f}{v_x g}=\sqrt{\frac{2h}{g}}\cdot\frac{\tau_f}{\sin\tau_f} \tag{25}$$

さて，最速降下線の最適軌道を実現する制御入力は（10)式で与えられるが，その式に（13)式，(15)式，(20)式を代入すると次式を得る．

$$\tan\gamma=\frac{\lambda_y}{\lambda_x}=\frac{v_x\tan(v_x g t\pm\pi/2)}{-v_x}=\tan(-v_x g t\mp\pi/2) \tag{26}$$

ここで，$-\pi/2\leqq\gamma\leqq\pi/2$ であることを考慮すると，(26)式から次の関係式が得られる．

$$\boxed{\gamma=\frac{\pi}{2}-v_x g t},\quad \therefore \gamma(t_f)=\frac{\pi}{2}-\tau_f \tag{27}$$

第 4 章以降では，KMAP ゲイン最適化法を用いるとこれらの最適制御問題を簡単に解くことができることを示す．

1.6　本書で利用する解析法

上記の例題からわかるように，数理計画法，非線形な不安定システムのフィードバック安定化，2 点境界値問題などの非線形最適制御問題の解を得るのは簡単ではない．これに対して，本書で利用する KMAP ゲイン最適化法は，これらの最適化問題を簡単に解くことができる．この　KMAP ゲイン最適化法とはどういうものなのか概略を説明する．

図 1.6(a) は，一般の非線形最適化法と KMAP ゲイン最適化法を比較したものである．一般の非線形最適化法では，対象とするシステムに対して，変数の制約条件や評価関数を決定した後，2 次計画法の問題であればシンプレックス法やラグランジュ法など，制御問題であれば非線形ダイナミクスに対して 2 点境界値問題の理論等を用いて解を見いだしていくものである．いずれも難しい理論に基づいて解を導出する手順を正確に実行していく必要があり労力のいる作業である．

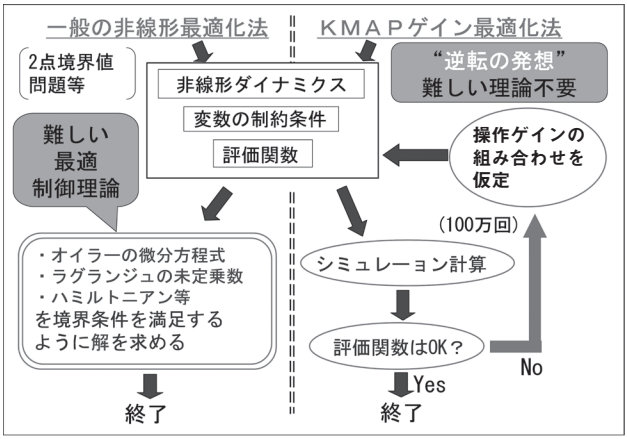

図 1.6(a)　一般の非線形最適化法と KMAP ゲイン最適化法の比較

これに対して，KMAP ゲイン最適化法は非常に単純な方法で，難しい理論は不要である．2 点境界値問題で説明すると，対象とするダイナミクスに対して求めたい操作入力を直接見いだす方法であり簡単である．まず最初に，操作入力を乱数を用いて時間関数として仮定する．次にこの操作入力を用いて，システムのダイナミクスを初期条件から終端時間まで時間積分（シミュレーション）する．その結果，終端条件を満足するかどうかを判断して満足するケースをとりだして，このときの評価関数を計算する．この操作を繰り返して，評価関数が最も小さくなるケースを探索するいわゆる**モンテカルロ法**である．ダイナミクスの特性を直接評価できるので，評価関数として設定する目標性能を柔軟に指定できるのも強みである．

KMAP ゲイン最適化法の特徴は，一般の非線形最適化の方法とは異なり，最初に解を仮定してしまう点にある．これは一種の“逆転の発想”で，非常に単純な作業の繰り返しであるが，難しい制御理論なしに確実に解にたどり着くことが確認されている．最適化の繰り返し計算は数十万～ 1 億回行う（問題により異なる）が，普通のパソコンで，10 秒～ 15 分（問題により異なる）で計算が終了する．この方法は，熟練した操作員が繰り返しながら少しずつ目標の性能を達成していくのに似ており，非常に難しい問題に対処する自然な方法のように感じられる．

第 2 章以降，具体的な問題について，KMAP ゲイン最適化法により簡単に解くことができることを示す．

第 2 章　数理計画法問題

第 1 章で説明したように，変数 x がある制約条件の下で，目的関数 f が最小となる変数 x の値を求めるような問題は数理計画法と呼ばれている．特に，目的関数が 2 次で制約条件が線形の場合は 2 次計画法問題といわれる．この種の問題は，シンプレックス法やラグランジュ未定乗数法などで解くことができるが，いずれも簡単ではない．そこで，本章では KMAP ゲイン最適化法を用いて，これらの最適化問題の解が簡単に得られることを例題によって示す．

例題 2.1　目的関数 2 次，制約条件線形の最小化（2 次計画法）[4)]

目的関数が次のような 2 次の非線形関数

$$f = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x \ = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 \tag{1}$$

を考える．変数 x_1，x_2 が次の線形不等号制約条件

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \le 6 \\ -x_1 + 4x_2 \le 2 \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{2}$$

のもとで，関数 f を最小とする x_1，x_2 を求めよ．

これは，目的関数が 2 次（非線形）で不等式制約条件が線形の場合である．この種の問題は，第 1 章に示したように，ラグランジュ未定乗数法で解くことができるが簡単できない．ここでは，KMAP ゲイン最適化法を用いると簡単に解を求めることができることを示す．この方法は，乱数を用いて，変数 x_1 および x_2 の組み合わせを仮定する．このとき，(2)式の制約条件を満足しないものは除外して，(1)式の目的関数 f を最小化する値を探索していく，いわゆるモンテカルロ法である．難しい理論は不要であり，簡単に解を得ることができる．このと

きの探索状況を**図 2.1(a)** に示す．探索回数は 1 億回実施したが，計算に要した時間は普通のパソコンで 10 秒程度である．ただし，実際に評価関数が最小値に達したのは 2,200 万回目であった．なお，文献 4）の結果との比較を**表 2.1(a)** に示すが，精度よく解が得られていることがわかる．また，制約条件の結果を**表 2.1(b)** に示すが，条件を満足していることが確認できる

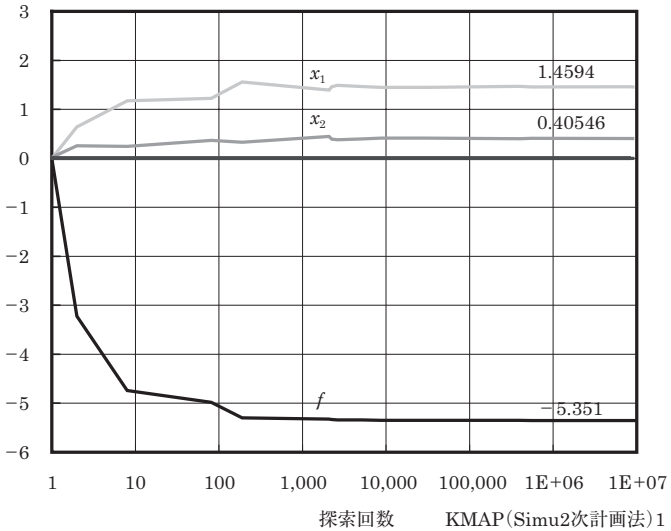

図 2.1(a)　2 次計画問題（KMAP 最適化法）
(KOPT.15.2 次計画法の例題 1.Y180314.DAT)

表 2.1(a)　2 次計画問題の解比較

変数	文献 4）の結果	KMAP 法の結果
x_1	1.459	1.4594
x_2	0.4054	0.40546

表 2.1(b)　制約条件の結果

制約条件	KMAP 法の結果
$3x_1 + 4x_2 \le 6$	6.000
$-x_1 + 4x_2 \le 2$	0.1624
$x_1 \ge 0$	1.459
$x_2 \ge 0$	0.4055

［著者略歴］

片 柳 亮 二（かたやなぎ・りょうじ）

博士（工学）

1946 年　群馬県生まれ

1970 年　早稲田大学理工学部機械工学科卒業

1972 年　東京大学大学院工学系研究科修士課程（航空工学）修了
同年，三菱重工業（株）名古屋航空機製作所に入社
T-2CCV 機，QF-104 無人機，F-2 機等の飛行制御系開発に従事
同社プロジェクト主幹を経て

2003 年　金沢工業大学航空システム工学科教授

2016 年～　金沢工業大学客員教授

著　書　『航空機の運動解析プログラム KMAP』産業図書，2007
『航空機の飛行力学と制御』森北出版，2007
『KMAP による制御工学演習』産業図書，2008
『飛行機設計入門―飛行機はどのように設計するのか』日刊工業新聞社，2009
『KMAP による飛行機設計演習』産業図書，2009
『KMAP による工学解析入門』産業図書，2011
『航空機の飛行制御の実際―機械式からフライ･バイ･ワイヤへ』森北出版，2011
『初学者のための KMAP 入門』産業図書，2012
『飛行機設計入門 2（安定飛行理論）―飛行機を安定に飛ばすコツ』日刊工業新聞社，2012
『飛行機設計入門 3（旅客機の形と性能）―どのような機体が開発されてきたのか』
日刊工業新聞社，2012.
『機械システム制御の実際―航空機，ロボット，工作機械，自動車，船および水中ビークル』
産業図書，2013
『例題で学ぶ航空制御工学』技報堂出版，2014
『例題で学ぶ航空工学―旅客機，無人飛行機，模型飛行機，人力飛行機，鳥の飛行』
成山堂書店，2014
『設計法を学ぶ 飛行機の安定性と操縦性』成山堂書店，2015
『飛行機の翼理論』成山堂書店，2016
『KMAP ゲイン最適化による多目的制御設計―なぜこんなに簡単に設計できるのか』
産業図書，2018

簡単に解ける
非線形最適制御問題

定価はカバーに表示してあります.

2019年5月1日　1版1刷発行

ISBN978-4-7655-3268-6 C3053

著　者　片柳亮二
発行者　長滋彦
発行所　技報堂出版株式会社

〒101-0051　東京都千代田区神田神保町1-2-5
電　話　営　業（03）（5217）0885
　　編　集（03）（5217）0881
F A X　（03）（5217）0886
振替口座　00140-4-10
http://gihodobooks.jp/

日本書籍出版協会会員
自然科学書協会会員
土木・建築書協会会員

Printed in Japan

Ⓒ Ryoji Katayanagi, 2019

装幀　浜田晃一　　印刷・製本　三美印刷

落丁・乱丁はお取り替えいたします.

JCOPY　〈出版者著作権管理機構 委託出版物〉

本書の無断複写は著作権法上での例外を除き禁じられています．複写される場合は，そのつど事前に，出版者著作権管理機構（電話：03-3513-6969，FAX：03-3513-6979，e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください.