

はじめに

水理学とは

大規模な土木工事は文明と共に始まった。その中には田畑の灌漑，都市用水の供給，洪水への対応など，水に直接関わるものが多くある。人々は水に助けられ，そして水と戦ってきた。

その水の力学を扱うのが水理学である。**水理学** (Hydraulics) は水の力学を扱う学問の，土木工学における名称であって，機械工学では水力学と呼ばれる。

力学と名の付く物理の基礎分野はいくつかあるが，我々が用いるのは古典的な**ニュートン力学**である。

ニュートン力学では，物体に作用する力とその物体の運動の関係が興味の中心になる。この対象物体として流体 (液体と気体) を扱う**流体力学**は水理学のベースになっている。

本書の特徴

本書は，土木工学の基礎として水理学を学ぶ学生のための入門書である。執筆にあたっては，できるだけ基本的なところから水理学を説明することを心がけた。

本書には，欄外の「注」がたくさんある。これらや囲み記事には，たとえば次のようなことが書いてある。

- 式を追うための計算やヒント：学生が自習できるように，式の誘導などを多く入れた。
- 周辺の知識：広い分野をカバーする土木工学の特徴を念頭に，関連する様々な事項についても触れた。
- さらに高度な内容についての紹介も行うようにした。

自習しやすくするため，次のような工夫をした。

- 式に含まれる記号は，初回に限らず，出てくる度に意味 (定義) を説明するようにした。
- たくさんの定数を含んでいるため複雑に見えるだけで，実はそうでもない式がある。こういう式のいくつかについては，変数のみを青色で示すことによって分かりやすくすることを試みた。

各章の扉にその章のまとめを載せた。このまとめは，これから学ぶことの紹介というよりも，後で思い出すために使われることを想定して用意したものである。

前提

本書は，読者が初級レベルの「微分・積分」および「力学」を学んでいることを前提にしている。

これらを全く学んでいないが本書に取り組みたいという学生諸君には是非，高校の教科書あるいは参考書に目を通しておいてもらいたい。

工学の特定の分野において力学を展開する学問は，一般に応用力学と呼ばれる。**構造力学**，**水理学**，**土質力学**は，土木工学の基礎となる応用力学の御三家である。このうち構造力学はもっとも基本的な分野なので，水理学よりも先に学ぶことも多い。折に触れて，構造力学で学んだように，という書き方をしているのはそのためであるが，あまり気にする必要はない。構造力学とのつながりを意識しておけばいい。

本書の構成

本書は、圧力から始めて必要事項を学びながら進み、最終的に水道管や河川の流れを学ぶ形を取っている。
全体の構成は以下のようである。
(入門書である本書は時間的に変化しない流れを対象としているため、波についてはほとんど扱っていない)

序編

第 1 章 単位と次元
単位を苦手とする学生が多いので、詳しい解説を行った。

第 1 編 静水力学―静止した水の力学―

第 2 章 静水圧
力から始めて、水の圧力の性質を調べる。最後に表面張力について触れる。

第 3 章 全水圧
面に作用する水圧の合力＝全水圧を計算する。全水圧の一形態である浮力についても学ぶ。

第 2 編 動水力学の基本―動く水の扱い―

第 4 章 流れの運動学
力学に入る前に、大変形する流体の運動の特徴とその記述法について述べる。

第 5 章 流れの力学
基本になる方程式を紹介したあと、実際に用いる運動量方程式とベルヌーイの定理について学ぶ。

第 6 章 水に作用する摩擦力
長い距離を流れる水にとって重要な摩擦力について、伝統的な研究の成果を学ぶ。

第 3 編 土木工学で扱う各種の流れ

第 7 章 ポテンシャル流
摩擦抵抗を無視できる完全流体の流れと、摩擦抵抗が重要な地下水の流れが同じ手法で扱われる。

第 8 章 管路の流れ
水道管などの流れを扱う方法の基本を学ぶ。

第 9 章 開水路の流れ
水面がある流れは水面形を決めること自体が簡単ではない。それを解くための様々な工夫を学ぶ。

第 4 編 次元解析

第 10 章 次元解析と模型実験
常に心に留めておくべき次元に焦点を当てる。その模型実験との関連を見る。

謝辞

最後に、本書の執筆を助けてくださった方々に謝意を表したい。
愛知工業大学の元同僚である木村勝行名誉教授、服部忠一朗名誉教授、後任の赤堀良介准教授を始めとする土木工学科、物理教室、数学教室の先生方には、内容についての相談に乗って頂き、大変有り難かった。
図は上田美嶺さん、愛知工業大学の学生だった本野汐里さん、(株)アイコの高瀬理恵さんをお願いした。特に大部分の図を作って頂いた高瀬さん抜きに本書は存在しなかった。高瀬さんと(株)アイコに深く感謝する。
本書は構想から完成まで10年以上かかった。この長きにわたってお付き合い頂いた技報堂出版(株)の天野重雄さんには、ただただ感謝するばかりである。

2019 年 1 月

四 俵 正 俊

目次

序編—— 1

第 1 章 単位と次元……………1

- 1.1 単位 2
 - 1.1.1 長さの単位 2
 - 1.1.2 異なる物理量間の単位の関係 2
 - 1.1.3 単位の換算 3
- 1.2 次元 5
 - 1.2.1 次元の一致 7
- 1.3 単位系 7
 - 1.3.1 基本単位 8
 - 1.3.2 組立単位の例 9
 - 1.3.3 SI 接頭語 (SI 接頭辞) 11

第 1 編 静水力学—静止した水の力学—

13

第 2 章 静水圧……………13

- 2.1 力と応力 14
 - 2.1.1 体積力と面積力 14
 - 2.1.2 外力と内力 14
 - 2.1.3 応力 15
 - 2.1.4 物質の三態と応力 17
 - 2.1.5 圧力 19
- 2.2 静水圧 19
 - 2.2.1 静止流体の圧力 19
 - 2.2.2 絶対圧力とゲージ圧力 20
 - 2.2.3 流体の重さと圧力 21
 - 2.2.4 圧力の単位 24
 - 2.2.5 静水圧の計算 26
 - 2.2.6 マノメータ 27
- 2.3 毛細管現象 31
 - 2.3.1 表面張力, 接触角 31
 - 2.3.2 毛細管現象 32

第 3 章 全水圧……………35

- 3.1 平面図形に作用する全水圧 36
 - 3.1.1 水平な面に作用する全水圧 36
 - 3.1.2 鉛直な面に作用する全水圧 37

8.2.1	狭くなる変化	144
8.2.2	拡がる変化	145
8.2.3	縮小, 拡大する流れの特徴	148
8.2.4	その他の局所的損失	148
8.3	動水勾配線とエネルギー線	148
8.3.1	動水勾配線, エネルギー線	148
8.3.2	サイフォン	151
第 9 章	開水路の流れ	153
9.1	開水路	154
9.1.1	基本事項	154
9.1.2	平均流速公式	155
9.1.3	マニング式	156
9.2	等流	158
9.2.1	等流水深	158
9.2.2	断面係数と通水能	158
9.3	常流と射流	161
9.3.1	フルード数	161
9.3.2	限界水深	162
9.3.3	限界勾配	163
9.4	不等流 1—漸変流	163
9.4.1	漸変流の微分方程式	163
9.4.2	図的解法	165
9.4.3	漸変流の水面形	166
9.5	不等流 2—急変流	168
9.5.1	比エネルギー	169
9.5.2	比力	172
9.5.3	比エネルギーと比力	174
9.5.4	水路急変部の流れ	176
9.5.5	常流—射流間の遷移	179
9.5.6	水路と水面形	182

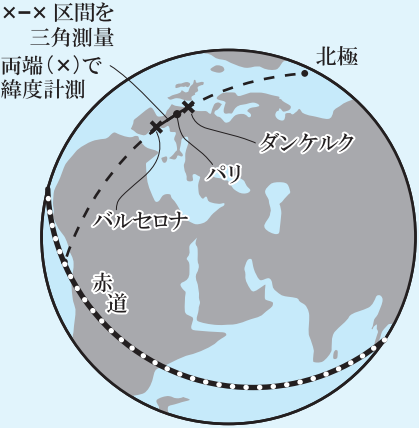
第 4 編 次元解析183

第 10 章	模型実験	183
10.1	次元解析	185
10.1.1	次元の重要性	185
10.1.2	次元解析	186
10.2	無次元数	186
10.3	相似則	187
10.3.1	幾何学的相似	187
10.3.2	力学的相似	187

第 1 章

単位と次元

- 物理で扱う量—物理量—の大きさを表現する基準として**単位**が決められる。
 - ・ある物理量と他の物理量の間には特定の関係がある。各物理量の単位は、この関係を反映した形で作られている。
 - ・物理量の計算を単位付きで行うとき、単位には文字と同じ計算法を適用すればよい。
 - ・単位の各要素の置き換えによって、複雑な単位の換算も機械的に実行できる。
- 次元式**によって、異なる物理量間の関係が示される。次元と単位は対応している。
 - ・次元が異なる量の加減算および比較は、物理的に無意味である。
 - ・次元の計算では、積分はかけ算、微分は割り算に対応する。
- ニュートン力学の範囲で扱う物理量の単位には、3つの**基本単位**と、それらを組み合わせた**組立単位**がある。基本単位と組立単位からなる単位の全体が単位系を構成する。
 - ・「SI (国際単位系)」の基本単位： 長さ m, 時間 s, 質量 kg
組立単位のいくつかには、固有の名称と記号が与えられている。
$$1\text{ N} \equiv 1\text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2$$
 - ・「MKS 重力単位系」の基本単位： 長さ m, 時間 s, 力 kgf
$$1\text{ kgf} \equiv 1\text{ kg} \times 9.80665\text{ m}/\text{s}^2 = 9.80665\text{ kg}\cdot\text{m}/\text{s}^2 = 9.80665\text{ N}$$



1.1 単 位

水理学は、構造力学、土質力学とともに土木工学の力学的基礎を構成する。この中で最も多種類の物理量を扱うのが水理学かもしれない。それに伴って多くの単位 (unit) が出てくる。

1.1.1 長さの単位

物理学では長さ、体積、重さ、時間など様々な種類の「量」を扱う。これらの量は、**物理量**と呼ばれる。物理量は「大きさ」を持つ。物理量の大きさは「基準の大きさ」 (= 単位量) の何倍か、で表現する。たとえば、スカイツーの高さが 634 m であるとは、それが基準の長さ 1 m の 634 倍であることを意味する。すなわち、 $634\text{ m}=634\times 1\text{ m}$ 。地球を 1 周する赤道の長さは、およそ 4 万 km (もっと正確には 40 075 km) である。何故 4 万 km なのか、土木の学生は知っておかねばならない。こんなことに理由があるのかと疑う学生もいるだろうが、単純明快な理由がある。地球一周が 4 万 km となるように 1 m の長さを決めたのである。

メートル

18 世紀、フランスではあまりにもバラバラな単位が商業や科学などの足枷になっていた。フランス科学アカデミーは単位の統一を試み、万人が納得する長さの基準を作るため 2 人の天文学者ドゥランブルとメシエンを派遣してパリを通る子午線の測量を行った。フランス革命のまっただ中、2 人は生命の危機にさらされながら 1792 年から 7 年をかけて、スペイン・バルセロナとフランス・ダンケルクの区間、約 1 000 km の三角測量と要所の緯度測定を行った (本章の扉の図)。アカデミーは、それに基づいて赤道ー北極間の子午線の長さを計算し、その $1/10\,000\,000$ を 1 m と定めた。つまり、地球 1/4 周が 1 万 km である。地球は球に近いから赤道の長さは約 4 万 km になる。

(「万物の尺度を求めてーメートル法を定めた子午線大計測ー」ケン・オールダー)

1.1.2 異なる物理量間の単位の関係

異なる物理量の単位同士は、(互いに独立、という関係も含めて) 特定の関係を持っている。最も簡単な例は、長さと面積の単位同士の関係である。長さの単位を 1 m と決めたら、 $1\text{ m}\times 1\text{ m}$ の正方形の広さを面積の単位とする発想はごく自然である。この面積の単位を m^2 と書く。同様に、体積は $1\text{ m}\times 1\text{ m}\times 1\text{ m}$ の立方体の体積を単位として m^3 と書く。このような考え方は自然であるばかりではなく、整合性のとれた単位の集まり全体ー**単位系**ーを築くために必須である*。

次に、速度の単位はどうなっているだろうか。(平均の) 速さは、[進んだ

距離]/[かかった時間] で求められる。たとえば、54 km を 3 時間で進んだ時の速さは、 $54\text{ km}/3\text{ h}=(54\times 1\text{ km})/(3\times 1\text{ h})=18\times (1\text{ km}/1\text{ h})$ となるから、1 時間に 1 km 進む速さの 18 倍の速さであることが分かる。ここで、[1 時間に 1 km の割合で進む速さ] すなわち $[1\text{ km}/1\text{ h}]$ を「速度という物理量の基準の大きさ」すなわち「速度の単位」とし、かつ、この単位を km/h で表記することにすれば次のようになる。 $54\text{ km}/3\text{ h}=18\times (1\text{ km}/\text{h})=18\text{ km}/\text{h}$ ところで、 $54\text{ km}=54\,000\text{ m}$ 、 $3\text{ h}=3\times 3600\text{ s}=10\,800\text{ s}$ であるから、同じ速さを $54\,000\text{ m}/10\,800\text{ s}=5\text{ m}/\text{s}$ と表すこともできる。この表現では [1 秒間に 1 m の割合で進む速さ] を速度の単位とし、m/s と書いている。

上に示した 2 つの速度の単位が、いずれも (長さの単位)/(時間の単位) の形をしているのは、「速度」という物理量の意味から来ている。長さの単位には、mm, cm, m, km, inch, mile, 尺, 里などがあり、時間の単位には s, m, h, day, year などがあるから、原理的にはこれらのどの組み合わせを使っても速度の単位を作ることができる。

- 以上の議論の中で、次の点に注意を払ってもらいたい。
- ① 長さの単位を決めると、面積と体積の単位を改めて決める必要はない。同様に、長さの単位と時間の単位を決めると、速度の単位はそれらから導かれる。
 - ② 長さにも時間にも種々の単位があるが、どれを使っても速度の単位は (長さの単位)/(時間の単位) という形を持つ。**単位は、物理量同士の関係をそのまま反映している**のである。1.2 節でこの考え方について詳しく述べる。
 - ③ $54\text{ km}/3\text{ h}=18\text{ km}/\text{h}$ は、形式上、 $54a/(3b)=18a/b$ と全く同じ計算法である。すなわち、単位記号である km と h をあたかも文字であると考えて計算すればよい。

1.1.3 単位の換算

単位の換算を機械的に行う方法を述べる。もっとも簡単な例から始めよう。

例題 1.1 12.3 m を km を用いて表せ。cm を用いればどうなるか。

解答 $1\text{ m}=10^{-3}\text{ km}$ であり、また $1\text{ m}=100\text{ cm}$ であるから $12.3\text{ m}=12.3\times 1\text{ m}=12.3\times 10^{-3}\text{ km}=0.0123\text{ km}$

*中国で作られ日本で伝統的に使ってきた尺貫法の面積の単位「坪」は、長さの単位を用いて 6 尺×6 尺の正方形の面積である。しかし面白いことに、体積の単位「升」は長さの単位と関係なく、両手ですくった量が起源だという。

$12.3\text{ m} = 12.3 \times 1\text{ m} = 12.3 \times 100\text{ cm} = 1\,230\text{ cm}$

ところで、上の式の中で左から2番目の $12.3 \times 1\text{ m}$ は、実用上まったく必要がない。つまり、左辺 12.3 m の「m」を、そのまま 1 m と等しい「 10^{-3} km 」や「 100 cm 」で置き換えれば良い。このやり方は、どんなに複雑な場合でも有効である。

例題 1.2 12.3 km^2 を m^2 で表せ。また、 12.3 m^3 を km^3 および cm^3 で表せ。

解答 12.3 km^2 の km を $1\text{ km} = 1\,000\text{ m}$ で置き換えれば

$12.3\text{ km}^2 = 12.3 \times (1\,000\text{ m})^2 = 12.3 \times 10^6\text{ m}^2$

同様に m を、 $1\text{ m} = 10^{-3}\text{ km}$ 、あるいは $1\text{ m} = 100\text{ cm}$ で書き換えると、

$12.3\text{ m}^3 = 12.3 \times (10^{-3}\text{ km})^3 = 12.3 \times 10^{-9}\text{ km}^3$

$12.3\text{ m}^3 = 12.3 \times (100\text{ cm})^3 = 12.3 \times 10^6\text{ cm}^3$

この例では、 1 km を $1\,000\text{ m}$ で置き換えるときに括弧をつけることが決定的に重要である。括弧をつけ忘れると誤りになる。

もうひとつ、べき乗について注意しておく。文字 a 、 b の計算で $ab^3 = a(b^3)$ になるのと異なり、 km^3 は $\text{k}(\text{m}^3)$ ではなく $(\text{km})^3$ の意味を持つ。その理由は、**km が k と m をかけ合わせたものではない**からである。 km の k と m は、乗除算よりも結びつきが強い「べき乗」よりもさらに強く結びついている。と言うより、 k と m は一体なのである。

c(センチ)、k(キロ)はそれぞれ $1/100$ 倍、 1000 倍を表す SI の**接頭語**である(後でまとめて示す)。接頭語は単位の先頭につけて 10 のべき乗倍を表すが、**単位と接頭語を分離することは出来ない**という約束である。 km 、 cm などは、 2 文字を使って表現した一つの単位であると考えれば良い。

例題 1.3 秒速 10 m (10 m/s) をキロメートル毎時 (km/h)、マイル毎時 (mile/h) で表せ。 $1\text{ mile} = 1.609\,34\text{ km}$ 。

解答 $1\text{ m} = 10^{-3}\text{ km}$ 、 $1\text{ s} = (1/3\,600)\text{ h}$ を用いて m 、 s を書き換えると、

$10\text{ m/s} = 10 \times \frac{10^{-3}\text{ km}}{(1/3\,600)\text{ h}} = 10 \times 10^{-3} \times 3\,600\text{ km/h} = 36\text{ km/h}$

さらに、 $1\text{ km} = (1/1.609\,34)\text{ mile}$ を用いると

$36\text{ km/h} = 36 \times (1/1.609\,34)\text{ mile/h} \doteq 22.37\text{ mile/h}$

上の単位の換算方法をまとめると、

① 単位の各要素 (例えば m) に 1 がついているものと思って (1 m)、これ

種々の速さ

1 m/s は人が少しゆっくり目に歩く速さ。時速に換算すると 3.6 km/h 。その 10 倍、 $10\text{ m/s} = 36\text{ km/h}$ は 100 m を 10 秒だから人間のかけっこ世界一の速さ。マラソンだと 20 km/h くらい。以下、列挙すると、新幹線が $75\text{ m/s} = 270\text{ km/h}$ くらい。ジェット旅客機は $250\text{ m/s} = 900\text{ km/h}$ 程の速さで上空の音速 (音速は気圧や気温で変わる) の $0.8 \sim 0.9$ 倍。水深 $4\,000\text{ m}$ の太平洋を伝わる津波は 700 km/h ていど。地球の自

転による地面の移動速度は、赤道で $463\text{ m/s} = 1\,667\text{ km/h}$ 、日本の緯度ではその 8 割ていど。我々は音速よりも速いスピードで地面と共に動いていることになる。さらに、地球が太陽の周りを回る速さが 30 km/s (時速 10 万 km) くらいで、銀河の回転で太陽系が移動する速さは 240 km/s (時速 86 万 km) ほどもあるという。光は 1 秒間に約 30 万 km (地球を 7 周半の距離) 進み、地球から月まで 1.3 秒で行く。

を書き換えたい単位で表現する (10^{-3} km)。

② 単位記号をあたかも文字のように扱い、数値と単位をそれぞれ計算する。

この方法で、複雑な単位の換算を機械的に実行することができる。

ここで単位付きの計算を行ったが、本書では以後もこれが続ける。複雑な単位を理解するのに有効であり、初めて出会う物理量の単位も簡単に導くことができるからである。さらに、式や計算の間違いのチェックにも役立つ。少し面倒だが、是非この方法に慣れてもらいたい。

単位付き計算法

直線上を一定加速度 a で運動する点の、初速度を v_0 、時刻 t の速度を v とすると、 $v = v_0 + a \cdot t$ である。

次は、これを用いた高校物理の問題と解答の例である。

Q 一次元の運動を考える。 2 m/s の速さで進んでいた物体が 5 秒間の等加速度運動を行った結果、速さが 17 m/s になった。加速度は何 m/s^2 か。

A 加速度を $a[\text{m/s}^2]$ とすると、上の式から

$17 = 2 + a \times 5 \quad a = 3[\text{m/s}^2]$

これを、本書では次のように表現する。

Q (前半は同じ) 加速度はいくらか。

A 加速度を a とすると、上の式から

$17\text{ m/s} = 2\text{ m/s} + a \times 5\text{ s} \quad a = 3\text{ m/s}^2$

本書で用いるこの表現法は、文字 (v 、 v_0 、 a 、 t) が単位まで含んだ物理量だという立場を取っている。この方法は、どんな単位を使っても、さらには単位が混在していても計算できるという長所を持っている。

これに対して諸君が使ってきた高校までの表現法では、文字は単位を含まない数値として扱われている。したがって、数値の計算を実行する前に単位を統一しておかねばならない。こちらの方法の長所は、式が煩雑にならないことである

1.2 次元

3 次元空間の中で位置を示すには 3 つの数値…例えば x 、 y 、 z 座標、あるいは緯度、経度、高度…が必要である。線形代数でも同様な意味でベクトル空間の次元という概念を学んだ。これらは数学的な用語としての「次元」である。ここでは、物理量の**次元** (dimension) という概念について述べる。